

Wi(e)der diese Sprachlosigkeit im Mathematikunterricht

1. Sprachlos in Mathematik

„In Mathematik einen Aufsatz schreiben? Was soll das?“ Mit solchen Fragen drücken Schülerinnen und Schüler eines neusprachlichen Gymnasiums ihr Befremden über solche Arbeitsaufträge aus. Texte zu verfassen wird der sprachlichen Ausbildung zugeordnet, nicht der mathematischen.

Ein hohes Niveau wird im Sprachunterricht angestrebt und auch oft erreicht, allerdings scheinen diese Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht verschüttet zu sein. Hier ist oft eine gewisse Sprachlosigkeit festzustellen, eine Unfähigkeit, Lösungswege zu erklären: „Da hab ich herausgehoben, da hab ich auf gleichen Nenner gebracht, ...“, so ähnlich klingen die erklärenden Äußerungen der Lernenden. Es werden einzelne Umformungsschritte genannt und kaum Begründungen gegeben. Über die Bedeutung, die Möglichkeiten oder Grenzen mathematischer Verfahren können Lernende selten Auskunft geben.

„Müssen wir wirklich einen Antwortsatz schreiben?“ Diese Forderung zu erfüllen wird als unnötiger Zusatz empfunden, die eigentliche Leistung beim Lösen einer Aufgabe ist doch das Berechnen des richtigen Ergebnisses.

Sprachliche Äußerungen werden im Mathematikunterricht immer eher knapp gehalten. Schülerinnen und Schüler lernen die symbolische Schreibweise der Mathematik kennen, die durch ihre Kürze und Prägnanz besticht. Statt langer Formulierungen einige wenige Zeichen, das macht Mathematik aus. So trainieren die Lernenden z. B. beim Lösen von Textaufgaben das Übersetzen von Alltagsproblemen in die Sprache der Mathematik. Die Sprache des Alltags scheint in der Mathematik keine Rolle zu spielen.

Mathematisches Wissen begegnet Lernenden in einer bestimmten sprachlichen Form, die sich oft in einem langen Prozess entwickelt hat. Jeder Versuch, mathematische Inhalte in der eigenen Sprache zu formulieren, führt meist zu ungenauen Ergebnissen, wird umständlich. Viele Wenn und Aber sind zu berücksichtigen, oft gelingt es nicht, Gemeintes verständlich auszudrücken.

Worin liegt dann der Wert solcher eigenständiger Formulierungen? Die Aufgabe, eigene Vorstellungen über mathematische Inhalte zur Sprache zu bringen, Zusammenhänge für andere verständlich zu erklären, erfordert eine intensive Auseinandersetzung und tiefe Beschäftigung mit diesen Inhalten. Nicht Verstandenes muss zuvor durch entsprechende Fragen im Austausch mit anderen geklärt werden. Werden zudem die Gedanken schriftlich fixiert, wächst die Verantwortung. Jedes Wort sitzt, muss wohl überlegt sein. Die eigenen Ideen müssen für andere nachvollziehbar, präzise dargestellt werden. Unverstandenes lässt

sich schnell auswendig lernen und wiedergeben, aber eben nicht inwendig lernen. Eigene Texte können darüber hinaus selbst zum Gegenstand weiterer Reflexionen werden. Deshalb versuchen die hier vorgestellten Aufgabestellungen verstärkt Reflexionsanlässe anzubieten, mit dem Ziel, Lernende zu vertieftem, reflektiertem Grundwissen zu führen und sie so zu befähigen, mit anderen zu kommunizieren. Werden die Ergebnisse solcher Reflexionen anderen mitgeteilt, entstehen Lernchancen. Vorstellungen des einzelnen werden im Austausch mit anderen korrigiert, präzisiert und zu einem Mathematik-Wissen weiterentwickelt.

2. Kommunikationsfähigkeit, ein Ziel des Mathematikunterrichts

Auch ein Blick in den Lehrplan zeigt den Stellenwert, den Sprache im Mathematikunterricht einnehmen soll. Es geht um die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik erkennen. Unter diesen Aspekten wird der sprachliche Aspekt der Mathematik genannt. Mathematik wird als ein elaboriertes Begriffsnetz vorgestellt, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden.

2.1. Vorstellungen zur Sprache bringen

Nicht nur schriftliche Texte sind von Schülerinnen und Schülern zu verfassen. Der Mathematikunterricht lebt natürlich von Diskussionen. Schon die einfache Frage, ob ein Quadrat ein Rechteck sei, kann in der ersten Klasse zu einem interessanten Meinungs austausch führen. In solchen Gesprächen werden neue, für manche überraschende Tatsachen verarbeitet. Vorverständnisse zu mathematischen Begriffen können so aufgedeckt werden, nicht tragfähige Vorstellungen aufgegriffen werden.

So hat eine Schülerin auf die Frage nach dem Unterschied zwischen einer Geraden und einer Strecke folgendermaßen geantwortet:



Als die Frage gestellt wurde, was man über den Graphen einer linearen Funktionen $y = k \cdot x + d$ aussagen könne, falls k negativ ist, bemerkte ein Schüler der 5. Klasse: „Wieso ist k negativ, das ist doch nichts Schlechtes?“

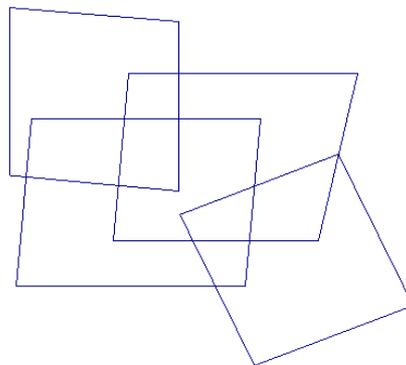
Eine Schülerin der 7. Klasse antwortet auf die Frage, wie denn die Tangente an den Graphen einer Funktion in einem bestimmten Punkt zu zeichnen sei: „Mit dem rechten Winkel!“ Sie dachte offensichtlich an die Tangente an einen Kreis, an eine bestimmte Eigenschaft dieser Geraden. Dass ihre Vorstellung aus der elementaren Geometrie nicht einfach auf die Tangente an einen Funktionsgraphen zu übertragen ist, wurde deutlich, da die angesprochene Konstruktionsvorschrift nicht anwendbar war.

Die Schwierigkeiten der Schüler und Schülerinnen der ersten Klasse, eine Gerade, die nicht parallel zum Tafelrand bzw. Heftrand gezeichnet ist, als Gerade anzuerkennen, sind bekannt. „Das ist doch schief!“, hat ein Schüler gerufen und ein Quadrat, das um 45° zum Tafelrand gedreht gezeichnet wird, also „auf der Spitze steht“, ist ein Karo, ein „Viereck aus lauter Diagonalen“, aber nie ein Quadrat.

Die Ergebnisse einer Aufgabe für Schüler und Schülerinnen der ersten Klasse zum Thema Rechtecke zeigen dies deutlich:

Nicht jedes Viereck ist ein Rechteck

Peter besucht die Volksschule. Er freut sich schon auf die neue Schule, in die er nächstes Jahr gehen wird. Im Schulübungsheft seines großen Bruders hat er einige Rechtecke gesehen. „So etwas kann ich auch“, dachte er. Er nimmt ein Blatt Papier und zeichnet. Das Ergebnis siehst du hier.



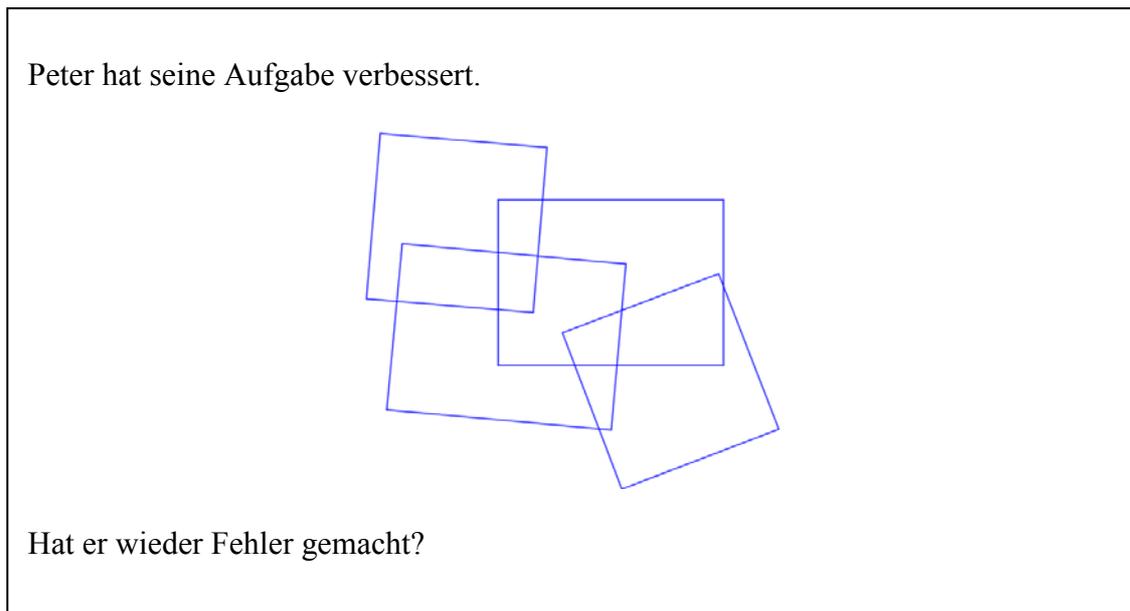
Hat Peter wirklich Rechtecke gezeichnet?

Seine Mathematiklehrerin würde sicher einige Fehler anzeichnen.

Nimm dein Geodreieck und verbessere die größten Fehler.

Die Schülerinnen und Schüler sollten die Rolle des Lehrers oder der Lehrerin übernehmen, die Arbeit korrigieren und Peter eine Rückmeldung geben. Die meisten Antworten lauteten: „Peter, verwende das nächste Mal das Geodreieck!“ oder „Du musst rechte Winkel zeichnen.“

In der nächsten Stunde wurde „Peters Verbesserung“ ausgeteilt mit demselben Arbeitsauftrag.



Wieder aus den Rückmeldungen: „Peter, du hast schon viel besser gearbeitet, nur hast du noch zwei Quadrate gezeichnet.“

Dass Quadrate als besondere Rechtecke aufgefasst werden können, ist für die Lernenden dieser Schulstufe keineswegs selbstverständlich, eher überraschend und zunächst verwirrend. Es widerspricht diese Feststellung anscheinend ihrem bisher erworbenen Wissen.

Mit solchen Aufgaben wird an bereits aufgebautem Wissen angeknüpft. Die Lernenden können sich an intuitiven Vorstellungen orientieren, wenn es darum geht, die Bedeutung mathematischer Begriffe auszuloten.

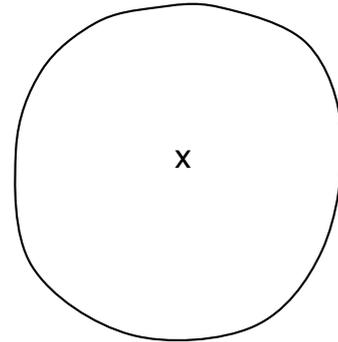
Zeige ich den Schülerinnen und Schülern der 1. Klasse z. B. das Bild eines Kreises und frage sie nach dem Namen dieser Figur, erhalte ich als Antwort: „Das ist ein Kreis!“

Was ist aber das Besondere an einem Kreis? „Der Kreis hat keine Ecken, er ist rund, er hat keinen Anfang und kein Ende.“ So lauteten die Antworten, die Schülerinnen und Schüler der ersten Klasse spontan auf diese Frage gaben. Die Frage, mit welchem Hilfsmittel man am besten einen Kreis zeichnet, wurde einstimmig beantwortet: „Mit dem Zirkel!“. Die Freihandversuche, die ich zuerst verlangt hatte, waren alle nicht zur Zufriedenheit der Kinder ausgefallen. Im Unterricht wurde also thematisiert, dass wir mit dem Zirkel eine Linie zeichnen können, wobei alle Punkte dieser Linie von einem fixen Punkt denselben Abstand haben und dass diese geschlossene Linie eben ein Kreis ist. Mit dem Begriff „Kreis“ sollten die Schülerinnen und Schüler am Ende dieser Unterrichtssequenz neben den von ihnen genannten Besonderheiten auch die Eigenschaft verbinden, dass „alle Punkte der Kreislinie vom Mittelpunkt denselben Abstand haben.“

Durch folgende Aufgabenstellung der Schularbeit sollte dieses Wissen geprüft werden:

Ein Gärtner möchte in einem Park ein kreisförmiges Blumenbeet anlegen, das einen Durchmesser von 10 m haben soll. Im Mittelpunkt des Beetes soll ein großer Rosenstrauch gepflanzt werden. Die Stelle ist mit einem x markiert

Mit Steinen legt er den Rand des Beetes, ist aber mit seiner Arbeit nicht zufrieden. Wie könnte er das Ergebnis seiner Arbeit verbessern?



Interessant war, dass die meisten, aber eben nicht alle Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe richtig lösen konnten.

Die meisten beschrieben, wie mit Hilfe eines Pflocks und eines Seils einen Zirkel für das Gelände hergestellt werden kann. Dort, wo der Rosenstrauch stehen soll, steckt der Gärtner den Pflock in die Erde. An dem Pflock befestigt er die Schnur, spannt sie straff und zieht um den Pflock in der Mitte einen Kreis. Eine Schülerin beschrieb genauer, dass die gespannte Schnur 5 m lang sein muss. „Der Gärtner ist auf diese kluge Idee gekommen, weil er gewusst hat, dass ein Kreis rund sein muss. Wenn man also vom Mittelpunkt aus Verbindungen mit verschiedenen Punkten der Kreislinie zieht, dann muss jede Verbindung gleich lang sein.“ Eine andere Schülerin antwortete: „Der Gärtner soll eine Schnur nehmen und sie im Kreis auflegen, weil man eine Schnur gut biegen kann.“ Sie scheint eher an die Krümmung gedacht zu haben, die man mit einer biegsamen Schnur herstellen kann, nicht aber mit einem starren Pflock, und nicht an die Eigenschaft des konstanten Abstands der Punkte der Kreislinie vom Mittelpunkt.

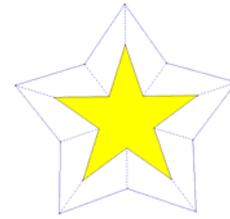
2.2. Alltagssprache – Fachsprache

Ich versuche meinen Schülern und Schülerinnen auch schon ab der 1. Klasse ansatzweise zu zeigen, wie in der Mathematik gearbeitet wird, welche besonderen Fragen gestellt werden oder wie sich die Bedeutung eines Begriffs wie z. B. jener der Strecke, der durchaus im Alltag gebraucht wird, verändert, strenger, eindeutiger definiert wird, wenn er in der Mathematik verwendet wird.

Eine Aufgabe, die zu einer Diskussion über den Begriff „Ähnlichkeit“ führte, wurde in einer dritten Klasse gestellt:

Marianne spielt gerne Theater.

Für eine Aufführung in der Adventzeit braucht sie einen großen Stern. Da die Vorlage, die sie besitzt, zu klein ist, zeichnet sie vom Mittelpunkt des Sterns durch jede Ecke eine Gerade und trägt vom Eckpunkt nach außen jeweils 5 cm ab.

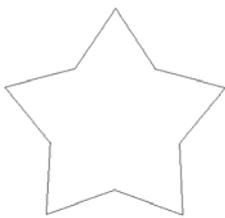


Diese 10 Punkte verbindet sie –

das Resultat sieht ihr hier abgebildet.

Friedolin, ein Mathematikstudent, der in der Theatergruppe mitspielt, meint: „Die beiden Sterne können gar nicht ähnlich sein!“

„Ähnlich sind sie schon“, meint Marianne verärgert, „ein bisschen wenigstens.“



„Ähnlich sind sie schon“, meint Marianne verärgert, „ein bisschen wenigstens.“

Sind diese Sterne, der äußere und der innere, zueinander ähnlich? Was meinst du?

Eine Schülerin bemerkte prompt: „Es kommt ja darauf an, was man unter Ähnlichkeit versteht!“ Sie erkannte die Notwendigkeit, den Begriff näher zu definieren.

2.3. Begriffe ausloten

Wie ist „Ähnlichkeit“ in der Mathematik definiert, wie wird ein Kreis mathematisch beschrieben, welche Vorstellungen von Tangente sind in der Differentialrechnung tragfähig? Durch welche Eigenschaften ist also die Form eines Kreises, eines Quadrates, eines Rechteckes oder sonst einer Figur bestimmt? Welche Folgerungen ergeben sich aus der oder den bestimmenden Eigenschaften für die Konstruktion solcher Figuren?

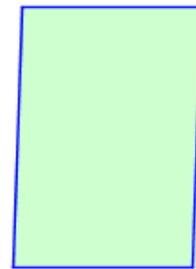
Solchermaßen reflektiertes Grundwissen erweist sich auch im Prozess des Problemlösens als vorteilhaft. Konstruktionsaufgaben, bei denen die Aufmerksamkeit der Lernenden auf verschiedene, oftmals nur einzelne Aspekte einer Figur gelenkt werden, zielen gerade auf dieses Wissen ab. Eine dieser Angaben lautet:

Zeichne drei unterschiedliche Rechtecke, deren Diagonalen $d = 8$ cm lang sind.

So eine Aufgabe ist für Schülerinnen und Schüler eher ungewohnt und aus mehreren Gründen schwierig. Sie wissen, wie Rechtecke zu zeichnen sind, können auch in einem Rechteck die Diagonalen einzeichnen, aber umgekehrt, mit den Diagonalen zu beginnen und nicht das fertige Rechteck vor sich zu haben, stellt zunächst ein scheinbar unüberwindliches Hindernis dar. In diesem Beispiel ist gefordert, eine bestimmte Eigenschaft der Diagonalen eines Rechtecks zur Lösung der Aufgabe zu verwenden. Die Diagonalen sind gleich lang und halbieren sich gegenseitig. Damit wäre wohl ein Anfang gemacht, aber es bleibt die große Unsicherheit, wenn nicht bekannt ist, wie lang oder wie breit die Rechtecke sein müssen. Dass eine Aufgabe mehrere, in diesem Fall so gar unendlich viele Lösungen hat, widerspricht außerdem der Erfahrung der Lernenden.

Ein Schularbeitsbeispiel zu diesem Thema:

Fridolin wird Bautischler und hat diesen rechteckigen Fensterrahmen hergestellt, doch sein Meister ist nicht zufrieden. Er misst die Diagonalen und sagt: „Das ist nie ein Rechteck!“
Wieso kann der Meister feststellen, dass diese Figur kein Rechteck ist, wenn er nur die Diagonalen misst und nicht die Winkel?
Denk an die Eigenschaften, die ein Rechteck hat!



2.4. Bezug zur Umwelt

Einen Bezug zur Umwelt, zur Alltagserfahrung herzustellen versucht folgende Aufgabenstellung anzuregen: Schreibe einen kurzen Aufsatz zum Thema: Wie das Rad die Welt veränderte!

Neben einem kurzen geschichtlichen Abriss sollten im Aufsatz Beispiele aus dem Alltag für das Vorkommen von Rädern oder kreisförmigen Gegenständen genannt werden, bei denen diese besondere Form einen bestimmten Zweck erfüllt.

Die häufigste Antwort war, wie zu erwarten, dass Räder den Transport erleichtern. Ein Dreieck z. B. könne nicht rollen und hätte ein Auto eiförmige Räder, würde es sich dauernd auf und ab bewegen. Zahnräder zur Kraftübertragung, Ventilatoren, Flaschenverschlüsse, Schrauben, die Töpferscheibe, auf der Gegenstände mit kreisförmiger Grundfläche hergestellt werden, das Ziffernblatt einer Uhr, über das die Zeiger, die in der Mitte befestigt sind, streichen, und manch anderes mehr wurden erwähnt.

Eine Schülerin erklärte: „Wenn wir uns ein Rad ansehen, denken wir sofort an einen Kreis. Die Speichen des Rades sind gleich der Radius und daher alle gleich lang.“ Eine andere präziserte und differenzierte zwischen dem Kreis als Fläche und dem Rad als Körper. Eine Schülerin schrieb: „Ein Rad ist eigentlich ein Zylinder“.

In einer der folgenden Stunden wurde dann die Frage gestellt: „Aus Sicherheitsgründen ist der Deckel eines Schachtes kreisförmig und nicht quadratisch. Was hat die Form mit Sicherheit zu tun?“ Die zunächst zaghafte Antwort einer Schülerin lautete: „Das hat sicher was mit der

Form zu tun. Ein Kreis ist überall gleich breit und bei einem Quadrat ist das nicht so.“ Im weiteren Gespräch im Klassenplenum wurde geklärt, dass das Mädchen wohl den Durchmesser des Kreises gemeint hat, der immer dieselbe Länge hat, während beim Quadrat die Seitenlänge kürzer als die Länge der Diagonale ist und der Deckel deshalb in den Schacht stürzen könnte, wenn er entsprechend gedreht wäre, was beim Kreis nicht passieren kann.

2.5. bewerten

Eine typische Aufgabe am Ende einer Unterrichtssequenz heißt: Schreibe einem Freund oder einer Freundin, was du Neues über gelernt hast!

Die Form des Briefes eignet sich sehr gut, Erklärungen und Begründungen formulieren zu lassen, um so die Kommunikationsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler zu fördern.

Sowohl geordnete Zusammenfassungen, welche die ihrer Meinung nach wichtigsten Punkte des durchgenommenen Inhalts enthalten, als auch begründete Statements über die Wichtigkeit des durchgenommenen Lehrstoffs sind von den Schülerinnen und Schülern zu erbringen.

In der dritten Klasse ist diese Ebene der Bewertung deutlicher angesprochen durch folgende Aufgabenstellung:

Wir haben in den letzten Stunden mehrere Strategien und Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte von Drei- und Vierecken kennen gelernt. Welche dieser Formeln hältst du für die wichtigste? Warum?

Ist es besser, diese Formeln zu wissen, oder reicht es, die Strategien zu kennen?

Schreibe ein kurzes Statement, in dem du deine Meinung begründest!

Unter den Formeln war den Lernenden die Dreiecksformel wichtig, weil man, wie sie begründeten, jedes Viereck in Dreiecke zerlegen kann, andere sprachen sich für die Trapezformel aus, aber alle hielten die Formeln für wichtig, denn, wie eine Schülerin schrieb: „Bei der Strategie weiß man nur, wie es geht, aber bei der Formel kann man es auch ausrechnen.“

Auch dies gehört zum Mathematiklernen: über die Möglichkeiten, Vorteile und Grenzen mathematischer Begriffe und Verfahren zu reflektieren.

2.6. erklären und begründen

Interessante Einblicke in das Denken meiner Schülerinnen und Schüler gewinne ich auch, wenn ich sie auffordere, Sachverhalte zu erklären. So habe ich einer zweiten Klasse folgenden Arbeitsauftrag gegeben:

Thales und Euklid sind zwei griechische Schüler, die eng befreundet sind.

1. Situation: Thales ist seit längerem krank. Euklid, sein Schulfreund, schreibt ihm, was in der Schule Neues durchgenommen wurde, nämlich, wie man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Er beschreibt auch, welche Besonderheiten ihm dabei aufgefallen sind (Winkel, Um- und Inkreis, usw.).

2. Situation: Thales macht eine wichtige Entdeckung, die er seinem Freund gleich mitteilen will: Alle Winkel im Halbkreis sind rechte.

Wähle eine Situation, versetze dich in die Lage von Thales oder Euklid und schreibe einen Brief an den Schulfreund!

Historiker mögen verzeihen, dass hier so unverschämt historische Daten verfälscht werden, aber neben den mathematischen Inhalten sollten auch die Namen der großen antiken Mathematiker ins Spiel gebracht werden.

Eine ähnliche Aufgabe zu einem ganz anderen Thema wurde Schülern und Schülerinnen der ersten Klasse gestellt.

Lieber Leonardo!

Gestern habe ich mich in der Schule sehr geplagt. Wir mussten XX Additionen und XV Subtraktionen rechnen. Alle waren sehr schwierig!

MMDCXXXII plus MDLXXIX gleich? oder

MCCXLVIII minus DCCCXCVII gleich?

Solche Rechnungen waren aufgegeben. Ohne Rechenbrett kann ich das überhaupt nicht lösen. Ich habe aber gehört, dass du eine neue Art kennst, Zahlen anzuschreiben.

Irgendwelche arabische Zeichen sollst du dafür verwenden.

Kannst du mir bitte diese Zeichen aufschreiben!

Wie würdest du die beiden Rechnungen mit den neuen Zeichen anschreiben? Ich habe auch gehört, dass man ganz große Zahlen schreiben kann. Wie geht das?

Wie rechnet man dann, wenn die Rechnungen mit diesen neuen Zeichen geschrieben sind?

Kannst du mir das bitte erklären!

Ich danke dir für deine Hilfe und sende dir liebe Grüße

dein Freund Hieronymus

Diesem Brief war eine Unterrichtseinheit zu den römischen Zahlen vorangegangen. Die Lernenden erfuhren, welche Bedeutung die einzelnen Symbole haben. Sie mussten von einer Schreibweise in die andere übersetzen und einfache Additionen ausführen.

In diesem Antwortbrief aber war nicht nur eine Erklärung eines gelernten Sachverhaltes gefordert. Die Schülerinnen und Schüler sollten darüber hinaus auch über den Vorteil unserer Zahlenschreibweise reflektieren.

3. Zusammenfassung:

Ein wichtiges Ziel meines Mathematikunterrichtes ist es, Schülerinnen und Schüler zu Reflexionen auf unterschiedlichen Ebenen anzuregen bzw. sie zu dieser Haltung des Reflektierens zu führen.

Sie sollen reflektiertes Grundwissen erwerben, mit dem Namen eines mathematischen Objekts Eigenschaften verbinden, die dieses Objekt bestimmen.

Sie sollen beispielsweise die Bedeutung geometrischer Formen im Alltag, ihr Vorkommen und ihre Zweckmäßigkeit überdenken, ebenso die Bedeutung und Anwendungsmöglichkeiten mathematischer Verfahren und Algorithmen kennen.

Es soll ihnen der mögliche Unterschied zwischen der Bedeutung von Begriffen in der Alltagssprache und in der Sprache der Mathematik bewusst sein.

Sie sollen in einer ihnen entsprechenden Weise mathematische Inhalte und Verfahren bewerten.

Einige Schülerinnen und Schüler können ihr Wissen schon in hervorragender Weise verbalisieren, anderen gelingt es noch nicht so präzise, aber alle sind auf dem Weg und lernen, Fragen zu stellen, Erklärungen zu geben, miteinander über mathematische Begriffe zu diskutieren, und dies, so bin ich überzeugt, auch auf Grund der Reflexionen, zu denen sie im Unterricht aufgefordert wurden.

Ich möchte mit einem Zitat enden, in dem ein Schüler der ersten Klasse schildert, wie er den Mathematikunterricht erlebt hat. Ich habe die Lernenden aufgefordert, an die Schülerinnen und Schüler, die nächstes Jahr neu an unsere Schule kommen, in einem Brief zu schreiben, was sie im Gymnasium in Mathematik gelernt haben. Felix schreibt, dass wir vieles aus der Volksschule wiederholt haben, dass wir uns besonders viel Zeit mit dem Zeichnen, dem Berechnen, dem Messen von geometrischen Formen und Körpern beschäftigt haben und „was du in deiner Schule sicher noch nicht gelernt hast, man kann auch Aufsätze schreiben zu allen Themen.“